PART4　数学的帰納法による様々な証明

例題

(1)　n を２以上の自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

Point Pickup

練習

(1)　n を４以上の自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$2^n > 3n+1$$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-1}{n+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

第 4 講　PART4 確認問題

1　n を 3 以上の自然数とするとき，次の不等式(A)が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

$3^n > 8n$　……(A)

（証明）

[1]　$n=$ ア のとき

(A)の左辺 ＝ イウ ，(A)の右辺 ＝ エオ

よって，$n=$ ア のとき，(A)は成り立つ。

[2]　$k \geqq 3$ として，$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$3^k > 8k$

$n=k+1$ のとき

(A)の左辺 － (A)の右辺

$=3^{k+1}-$ カ

$=3\cdot 3^k-$ カ

$>3\cdot$ キ $-$ カ

$=$ クケ $k-$ コ >0

よって，$3^{k+1}>$ カ となり，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，3 以上のすべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

（証明終わり）

ア ～ コ に当てはまる数や式を答えよ。

カ ， キ は，次の①～④のうちから選べ。

① k　　② $k+1$

③ $8k$　　④ $8(k+1)$

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$$a_1=6,\ a_{n+1}=2a_n-3n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

まず，$a_1=6$，$a_2=$ [サ]，$a_3=$ [シス] より，

数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=$ [セ] $n+$ [ソ] ……(A)と推測される。

これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

(証明)

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=$ [タ] となり，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$a_k=$ [セ] $k+$ [ソ]

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式より

$a_{k+1}=2a_k-3k$

$=2($ [セ] $k+$ [ソ] $)-3k$

$=$ [チ] $k+$ [ツ]

$=$ [テ] $(k+1)+$ [ト]

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

(証明終わり)

したがって，求める一般項は

$a_n=$ [セ] $n+$ [ソ]

PART4　数学的帰納法による様々な証明

例題

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

(1)　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{2n}{n+1}$ …… ① とする。

[1]　$n=2$ のとき　　(①の左辺) $=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，　(①の右辺) $=\dfrac{2\cdot 2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

よって，$n=2$ のとき，①は成り立つ。

[2]　$k\geqq 2$ として，$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

$n=k+1$ のとき

(①の左辺) − (①の右辺)

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$=\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

よって，$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{k+2}$ となり，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，2 以上のすべての自然数 n について，①が成り立つ。

(2)(i)　$a_2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$a_3=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，$a_4=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

(ii)　(i)より，一般項は $a_n=\frac{n+1}{n}$ …… ① と推測される。これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき，$a_1=2$ となり，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$a_k=\frac{k+1}{k}$$

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式より

$$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}=2-\frac{k}{k+1}=\frac{2(k+1)-k}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}$$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=\frac{n+1}{n}$

練習

(1)　n を 4 以上の自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$2^n > 3n+1$$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-1}{n+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

(1)　$2^n > 3n+1$ …… ① とする。

[1]　$n=4$ のとき　(①の左辺)$=2^4=16$，　(①の右辺)$=3\cdot4+1=13$

よって，$n=4$ のとき，①は成り立つ。

[2]　$k \geqq 4$ として，$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$2^k > 3k+1$$

$n=k+1$ のとき

(①の左辺)$-$(①の右辺)

$$=2^{k+1}-\{3(k+1)+1\}=2\cdot2^k-(3k+4)>2\cdot(3k+1)-(3k+4)$$

$$=3k-2>0 \quad (k \geqq 4 \text{ より})$$

よって，$2^{k+1}>3(k+1)+1$ となり，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2]より，4 以上のすべての自然数 n について，①が成り立つ。

(2)(i)　$a_2=\dfrac{3^2-1}{1+1}=4$，$a_3=\dfrac{4^2-1}{2+1}=5$，$a_4=\dfrac{5^2-1}{3+1}=6$

(ii)　(i)より，一般項は $a_n=n+2$ …… ① と推測される。これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき，$a_1=3$ となり，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると $a_k=k+2$

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式より

$$a_{k+1}=\frac{{a_k}^2-1}{k+1}=\frac{(k+2)^2-1}{k+1}=\frac{k^2+4k+3}{k+1}=\frac{(k+1)(k+3)}{k+1}=k+3$$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=n+2$

第 4 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イウ：27，エオ：24，カ：④

キ：③，クケ：16，コ：8

[解説]

[1] $n=3$ のとき [A]

$(\text{左辺})=3^3=\mathbf{27}$，$(\text{右辺})=8\cdot 3=\mathbf{24}$

よって，$n=3$ のとき，(A)は成り立つ。

[2] $k\geqq 3$ として，$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$3^k>8k$

$n=k+1$ のとき，(A)において

(左辺) − (右辺)を計算すると [B]

$$
\begin{aligned}
3^{k+1}-8(\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) &= 3\cdot 3^k-8(k+1)\\
&> 3\cdot 8\boldsymbol{k}-8(k+1)\\
&= \mathbf{16}\boldsymbol{k}-\mathbf{8}>0
\end{aligned}
$$

すなわち　$3^{k+1}>8(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，3 以上のすべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

[A]　数学的帰納法
ある命題が，$n\geqq 3$ であるすべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の 2 つのことを示す。
[1]　$n=3$ のとき成り立つ。
[2]　$n=k$（$k\geqq 3$）のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

[B]　(A)に $n=k+1$ を代入した不等式が成り立つことを示す。

2

[正解] サ：9，シス：12，セ：3，ソ：3，タ：6，
チ：3，ツ：6，テ：3，ト：3

[解説]

$a_1=6$

$a_2=2a_1-3\cdot1$ [C]

$=2\cdot6-3=\mathbf{9}$

$a_3=2a_2-3\cdot2$

$=2\cdot9-6=\mathbf{12}$

よって，数列 $\{a_n\}$ の第３項までは，初項 6，公差 3 の等差数列であるから

$a_n=6+(n-1)\cdot3$ [D]

$a_n=\mathbf{3n+3}$ ……(A)

と推測される。これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき [E]

$a_1=\mathbf{6}$ となり，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$a_k=3k+3$

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式より

$a_{k+1}=2a_k-3k$

$=2(3k+3)-3k$

$=\mathbf{3k+6}$

$=\mathbf{3(k+1)+3}$

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

したがって，求める一般項は

$a_n=3n+3$

[C]　$a_{n+1}=2a_n-3n$ に $n=1$，$n=2$ を順に代入する。

[D]　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$a_n=a+(n-1)d$

[E]　数学的帰納法
ある命題が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の２つのことを示す。
[1]　$n=1$ のとき成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも成り立つ。